Uno sguardo al nuovo indirizzo logico-matematico delle scienze deduttive.
(Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1906-1907
nella Università di Catania)
«Annuario della Università di Catania», anno 1906-1907, Catania, pp. 21-82.

Eccellenza, Signore e Signori, (*)

In verità, o Signori, non oso chiamar propizia a Voi tutti, nè a me, quella sorte, che designava un matematico all' onorifico ufficio d' inaugurare questo nuovo anno di studî.

Mentre i cultori delle altre discipline spesso hanno sottomano gran copia di argomenti vasti e attraenti, che interessano ogni sorta di persone civili; nessuno vorrà disconoscere, che nei concetti matematici è invece una così stringata determinatezza, il linguaggio che li esprime è così severo e remoto dal parlare comune, e l'oggetto di quel linguaggio è così astratto, che mal si prestano a un discorso da tenere in una cerimonia come quella che qui ci aduna, innanzi ad un pubblico, di cui la maggior parte è intesa a studí molto lontani dalla matematica. L'altare, sul quale noi sacrifichiamo, o Signori, ha pochi de-

(*) Assistevano all' inaugurazione degli studii S. E. L. Rava, Ministro della Pubblica Istruzione, e le LL. EE. T. Tittoni ed A. Maiorana.

voti; e la Dea non rivela le sue bellezze se non a coloro, che si consacrano a lei interamente. Perciò vedete me in condizione non molto diversa da quella d'un viaggiatore, che incontri difficoltà nello spendere, trovandosi in luogo dove la sua moneta non corre. Se resto nei limiti de' miei studi speciali, riuscirò probabilmente oscuro alla più parte de' cortesi uditori; se sconfino, fra tanti altri pericoli a cui vado incontro, rischierò di usurpare l'ufficio altrui, e di udirmi sussurrare intorno il " ne sutor ultra crepidam ". Per far fronte a codesta difficoltà, non dirò con onore, ma senza mio scorno, ho gran bisogno di contare sulla Vostra cortese indulgenza.

Nè dovrei punto stupirmi se molti di Voi, o Signori, si sentissero un po' diffidenti, o fosser mal prevenuti per ciò, che la parola oggi spetta alle Matematiche. Non sappiamo noi forse che la più parte dei tecnici, e molti persino fra i nostri giovani scolari di Matematica, considerano lo studio di questa scienza all' incirca come un male necessario; o come spediente, cui è giocoforza ricorrere, chi voglia rendersi conto dell' equilibrio delle varie parti d' un edifizio, o stimare l' effetto utile delle forze messe in azione da una macchina? — Simili in questo all' atteggiamento del sommo *Goethe*: il quale di fronte alle matematiche non fu ammiratore, nè spregiatore assoluto; riconoscendo che esse fruttavano quello, che appunto mancava al suo genio (*) Ma ben

---

(*) *F. Schur*, in Jahresber. d. deutschen Matematiker-Vereinigung, XIX, 186 (1905).

più profondo, e ben più atto a dissipare ogni cattiva opinione delle matematiche, il pensiero del nostro G. Leopardi, che qui ripeto con le sue stesse parole! Egli dice:

" È certo che il grande poeta può essere anche gran matematico, e viceversa. Se non è, se il suo spirito si determinò ad un solo genere (che non sempre accade) ciò è puro effetto delle circostanze „. Ed altrove:

" Si può dir che da una stessa sorgente, da una stessa qualità dell' animo, diversamente applicata e diversamente modificata e determinata da diverse circostanze e abitudini, vennero i poemi d'Omero e di Dante e i ' Principi matematici della filosofia naturale ' di *Newton* „ (*).

Si o Signori; anche la matematica è in non piccola parte poesia! Anche il matematico guarda dall' alto la realtà delle cose; e, astraendo da ciò che hanno di greggio e di mutabile o caduco, ne ravvisa le parti perfette e immanenti, ne rileva le mutue relazioni con linguaggio espressivo ed universale. Anch' egli trasforma certe impressioni da pochi avvertite in mirabili edifizi speculativi, come per sola virtù di fantasia; a lui tocca similmente il travaglio di costringer l' idea nella formula, e di cimentare il pensiero alla stregua di lunghi e penosissimi calcoli! E (dirò con Enrico D' Ovidio) " il sentimento dell' eleganza nel concetto e della venustà nella forma non spiccano forse nei veri matematici come nei poeti: così che spesso una dimostrazione è bella quasi allo stesso modo di un so-

(*) ' *Pensieri di varia filosofia e di bella letteratura* ' III, 343, e IV, 69.

netto, ed una formula sembra, dirò così, un *verso scientifico?* „ (*).

***

Il soggetto di cui voglio intrattenervi (per quel tanto che il dovere da un lato e la discrezione dall' altro consigliano) è bensì proprio delle *matematiche*: dirò anzi che spetta alla quintessenza loro; *ma su qualche* altro soggetto presenta il vantaggio d'interessare molto maggior numero di culte persone; poi che *sorge* da un terreno comune a quasi tutte le scienze, e tocca, si può dir, le radici dell' umano sapere.

Le relazioni di buon vicinato fra matematici e filosofi sono di vecchia data; e vi fu tempo che, nelle menti dei Pascal, dei Descartes e dei Leibniz, scomparve quasi ogni distinzione fra sommo geometra e sommo pensatore. E codesta buona armonia si conferma e trova nuove sanzioni nei più recenti congressi filosofici di Parigi (1900) e Ginevra (1904): tanto è vero che qualche critico arguto credè, non è molto, di scorgere, che gli spiriti e le tendenze matematiche siano di moda oggi tra i filosofi, com' erano pochi anni fa le scienze sperimentali e la cultura biologica.

I fondamenti della Logica, dell'Aritmetica, della Geometria; il valore del metodo deduttivo, le quistioni circa la natura genuina delle conoscenze matematiche son cose di capitale importanza per la critica dei principi delle

---

(*) ' *Uno sguardo alle origini e allo sviluppo della Matematica pura* ' Torino, 1889, pag. 63.

varie scienze (epistemologia) e per quel *corpo di dottrine*, che oggi si chiama teoria della *conoscenza*, o *gnoseologia*. Se per esempio si prova, che non siano *sintetici*, nel senso Kantiano, i giudizi propri delle *matematiche*, viene a mancare—secondo ZIMMERMANN (*)—il più valido sostegno alla *Critica della ragion pura*. V'è quì tutto un campo d'indagini, che GUGLIELMO LEIBNIZ già coltivò con singolare insistenza ed amore—raccogliendovi frutti, da Lui tenuti in gran conto per valore scientifico e filosofico — e che fu più tardi negletto così dai matematici, che lo reputavano estraneo al loro dominio e proprio della " filosofia ", come dai cultori di questa, che non vi potevano accedere per mancanza della necessaria preparazione matematica.

E a quest' ordine di speculazioni ha dato negli ultimi tempi novello impulso e potente sussidio il crescere e il diffondersi della *Logica Matematica*; cui molto contribuisce, da parecchi anni in quà, l' opera zelatrice d'un valoroso matematico nostro, il prof. G. PEANO dell'Università di Torino, che se n' è fatto una specie di apostolato scientifico. Dare ad intendere in breve che sia questa *Logica simbolica*, o *Logica algoritmica*, o *Logistica*, non è impresa da poco. Essa studia le proprietà formali delle relazioni e operazioni logiche, e la loro rappresentazione ideografica mediante un piccol numero di simboli, che hanno un significato preciso e obbediscono a regole ben determinate, simili a quelle che governano il calcolo alge-

(*) '*Ueber Kant's mathematisches Vorurtheil*' Wien. 1871.

brico. Nel conferirle il nome di Logistica (il cui senso etimologico richiama appunto le idee di ragionamento e di calcolo, e che un tempo significò propriamente il calcolo aritmetico e l'Algebra) si trovaron d'accordo, all'ultimo congresso di Ginevra, due chiari filosofi: il COUTURAT di Parigi e l'ITELSON di Berlino. Ma il nome non deve far pensare a qualcosa di assolutamente nuovo o di eterodosso: perchè di nuovo, in fondo, non c'è che il metodo, molto più esatto e potente dei metodi puramente verbali di raziocinio. La Logistica insomma non è un altra Logica, diversa da quella tradizionale, bensì un'evoluzione e un perfezionamento della Logica formale di Aristotile e degli scolastici: direi quasi che sia la forma moderna della Logica deduttiva, che racchiude in sè tutta quanta la logica aristotelica e scolastica, quantunque di molto le avanzi.

L'ideale a cui mira è bene espresso da G. W. LEIBNIZ— che fu il primo ad averne chiara e distinta nozione, e pe dettò anche i principi—dove confessa di aver meditato per tutta la sua vita ad " una maniera di Speciosa generale, dove tutte le verità di ragione sarebber ridotte ad una foggia di calcolo; e che potrebbe essere in pari tempo una maniera di Lingua o Scrittura universale, ma infinitamente diversa da tutte quelle immaginate fin qui; però che in essa i caratteri e le stesse parole dirigerebber la ragione (come spesso accade nell'Algebra); e do-

ve gli errori, tranne quelli di fatto, non sarebbero che errori di calcolo (*) „.

Dirò subito che questo supremo ideale di *calculus ratiocinator* è ancor lungi da noi; ma potè nondimeno vedersi raggiunto nel campo stesso delle discipline matematiche; dove le parti meglio evolute già si trattarono e si svolsero con processo rigorosamente ideografico, mercè del simbolismo logico-matematico ideato e costrutto dal prof. G. Peano nel suo *Formulario mathematico*, opera ch' Egli dirige dal 1895. È questo un nuovo algoritmo veramente paragonabile per coerenza ed efficacia a quello dell'Algebra; direi quasi un' Algebra portata alla sua maggior perfezione ed atta ad estendere, anche molto di là dalle scienze matematiche, i vantaggi di quel rigore, di quella precisione e di quella certezza, onde queste furon sempre celebrate ' ab antiquo '.

***

Non sembra che Leibniz abbia avuto precursori di vaglia in quest'ordine di speculazioni. Si ricordano, è vero, Pierre Hérigone (**), Johann Pell (***) Jungius, Ploucquet; e da poche notizie comunicate da G. Itelson al Congresso storico di Roma del 1903 — relative a Johann Weigel, Christof. Sturm, J. C. Lange, Pierre Du Moulin ed altri, emerge come anche prima di Leibniz fosse già nota la suggestiva rappresentazione delle figure sillogistiche per

---

(*) *Opera phylosophica*, 701 (1840).

(**) *Cursus mathematicus*, Parisiis, 1644.

(***) *Introductio in Algebram*, 1659.

mezzo dei cerchi attribuiti ad *Eulero;* e già segnalata la transitività di certe relazioni — come l' " esser legato insieme con ,, e simili — oltre quelle significate comunemente per le frasi " è contenuto in ,, " è maggiore di ,, " è uguale a ,, ecc.: ma non di meno resta sempre a Leibniz il merito di aver visto prima d'ogni altro la possibilità d'una logica matematica, come oggi s' intende, e di averne tentato la costruzione. " Sentio — Egli " dice — Logicam quae habetur in scholis tantum abesse " a Logica illa utili in dirigenda mente circa veritatum " variarum inquisitionem, quantum differt Arithmetica " puerilis ab Algebra praestantis mathematici (*). ,,

Con tutto ciò nulla Ei dette alle stampe di queste Sue profonde ricerche; i cui mirabili frutti vengono oggi alla luce per la pubblicazione dei Suoi manoscritti inediti della Biblioteca Reale di Hannover.

I successori, sopra tutti lo svizzero LAMBERT nel secolo XVIII; e nella seconda metà del XIX gl' inglesi BOOLE, DE MORGAN e MAC-COLL, l' americano CARLO PEIRCE e i tedeschi SCHRÖDER e FREGE, sapendo che Leibniz era giunto a comporre un algoritmo logico fondato sulle proprietà dei segni d' inclusione, di congiunzione e disgiunzione, di negazione, di eguaglianza e di assurdo, riuscirono per vie diverse a ricostituirlo in un tutto organico e a svolgerlo sistematicamente — per altro senz'aggiungervi gran che di nuovo, come di poi s' è visto. — Ed è importante

---

(*) L. COUTURAT, ' *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* ', Paris, 1903, pag. 419.

osservare, che il primo di questi Autori, il Lambert, assai probabilmente conobbe i manoscritti del Leibniz (*).

E in Leibniz, molto più che nei successori, troviamo larghi tentativi di accrescer l' efficacia e il valore del simbolismo: come ad es. negli sforzi più volte esplicati per assegnar le regole della definizione, per scrivere proposizioni contenenti lettere variabili, etc: sforzi, che rimaser per altro inavvertiti sino a questi ultimi tempi.

Soltanto nel 1879 il Frege, prof. a Jena, potè nel suo *Begriffsschrift* esprimere parzialmente in simboli qualche proposizione contenente lettere variabili: ma dovè subito arrestarsi a motivo delle notazioni poco felici (**): e più tardi ancora il Peano, mercè una compiuta analisi di tutte le idee della Logica, riusciva non solo ad esprimere in simboli qualche proposizione isolata, ma ben anche a tradurre nel suo compendioso formulario ideografico, (senza mai fare appello al linguaggio) un gran numero di teorie matematiche. Accanto ai concetti logici poco fa ricordati — come di eguaglianza, d' inclusione, di congiunzione etc. — egli pose in ufficio di enti primitivi la nozione di *classe* o *aggregato*, la relazione di *appartenere* (che intercede fra il soggetto e l' attributo d' una proposizione semplice, e che già gli scolastici aveano separata da quella d' inclusione, distinguendo il “ sensus compositi „ e il “ sensus divisi „ del verbo

---

(*) G. Vacca, ‘ *La Logica di Leibniz* ’, Riv. di Matem., VIII, 65 (1903).

(**) G. Vacca, ibid., 66.

essere) con la sua inversa, l' idea di *funzione* o *rappresentazione*, gl' *indici* al segno di deduzione, le convenzioni circa le *parentesi* e le lettere *variabili*, ecc. Non però tutte queste idee, fondamentali rispetto al sistema Peaniano, sono fra loro *irreducibili:* le nozioni veramente primitive, o *categorie* nel senso Aristotelico e Kantiano (il cui valore ed ufficio non si apprende altrimenti che per via d' esempî, attraverso il linguaggio comune) si posson restringere a *nove;* e ancora v' è qualche libertà nella scelta.

A questo modo il simbolismo logico-matematico acquistava un' elasticità ed un potere non mai raggiunto prima, ricevendo — per opera del pr. Peano e della Sua scuola — uno sviluppo così ragguardevole, da suscitar nella critica forestiera e nostrale un vivo interesse, e buon numero di appassionati fautori ed oppositori.

Non par che si possa impugnare l' utilità d' un buon algoritmo ideografico, come strumento proprio a guidare e disciplinare il pensiero; ad escludere le esuberanze, i sottintesi, le ambiguità, le restrizioni mentali, le insinuazioni, ed altri difetti presso che inseparabili dal comune linguaggio sì parlato che scritto; a sostenere e dirigere la mente nostra in quelle operazioni intellettuali, che richiedono una gran precisione. A buon conto notò già qualcuno, che si debbono all'algoritmo logico i soli progressi effettivi conseguiti nel campo della Logica formale dopo i tempi di Aristotile e della Scolastica: ma ben

altri sono i frutti ch' esso ha già maturato agli studi, assai scabrosi e difficili, sui fondamenti delle varie discipline matematiche.

In codeste ricerche, dove l' errore si cela spesso in malintesi o in particolari di poca o niuna apparenza, molto giova uno strumento per osservare le minime differenze ideali (differenze che, tra le frange e le pieghe del comune linguaggio e senza una lente che le ingrandisca, passano troppo sovente inavvertite); uno strumento che ci costringa a pesare e vagliare scrupolosamente ogni idea; che notomizzi ogni ragionamento, e ne palesi l'intima struttura e lo scheletro. Non è forse eccessivo paragonare la Logica matematica ad una *microscopia del pensiero*; e tutto l' indirizzo logistico ad una specie di *positivismo della ragion deduttiva*.

Chi non sente, ad es., il pregio di aver sott'occhio in brevissimo spazio, così da poterle abbracciar con lo sguardo, tutte quante le ipotesi che è d' uopo non perder di vista nel corso d' una dimostrazione un po' complicata? Come l' *occhio* umano è in sè tutt' altro che un docile e sicuro strumento degli atti a cui si direbbe ordinato, così la *parola*, non sorretta dal metodo, è bene spesso argomento di gravi illusioni ed errori. E però, se l'andare coi piè di piombo è savio proposito in chi muove per gli ardui sentieri dell' induzione sperimentale o storica, non è consiglio meno opportuno a chi voglia percorrere con sicurezza le vie della deduzione logica, in apparenza tanto più facili e piane. Le cautele, di cui la Logica matematica circonda una dimostrazione rigorosa, sembrano in

tutto paragonabili a quelle, onde il Fisico si premunisce contro le cause d'errore o di falsa interpetrazione dei fatti; e una deduzione da premesse alquanto studiate è operazione non meno delicata e fallace d'un'esperienza di Fisica.

Del resto valgon qui le stesse trite ragioni, che stanno a favore di qualsivoglia ben costrutto linguaggio, nell'impresa d'agevolare e promuovere gli sforzi del nostro intelletto per la conquista del vero. Gli argomenti, che si odon per solito contro la Logistica, somigliano un po' troppo al famoso dilemma del califfo Omar, distruttore della Biblioteca d'Alessandria: " O la vostra Logica porta alla stesse conclusioni della nostra, e non mi giova d'apprenderla; o arriva a conclusioni diverse, e allora è falsa e dannabile ". Oppure: " Non corrisponde a un bisogno fortemente sentito "; e " gli scienziati s'inaridiscon la mente studiando Logica-matematica ": così Benedetto Croce, in " *Lineamenti d'una Logica, come scienza del concetto puro* " (Napoli, 1905), p. 43. Ma se si pensa che persino la gran mente del Vico — siccome il Croce stesso riferisce più tardi (pag. 80)—pronunciava un giudizio non molto dissimile intorno alla Geometria: e cioè che " alle menti, già dalla metafisica fatte universali, non riesca agevole quello studio proprio degl'ingegni minuti, " non farà più meraviglia il vedere come siano avversate le nuove tendenze, intese qual sono ad affrancare il pensiero dalle tentazioni e dalle lascivie della parola, ad escludere qualunque inconscio richiamo all'evidenza, ad impedire che nel discorso s'insinui qualche pre-

messa inavvertita: e che hanno bene spesso apparenza di volgersi a cose di poco o niun conto, e di dar corpo alle inezie. Se non che la cura anche delle cose assai piccole e delle inezie si potrebbe, all' occorrenza, molto ben confortare e giustificare osservando, con G. LEOPARDI, che:

" ......non altrimenti il filosofo arriva alle grandi verità che sviluppando, indagando, svelando, considerando, notando le menome cose; e risolvendo le stesse cose grandi nelle loro menome parti. „ (*)

E mi soccorre qui un fatto narrato da MAURIZIO CANTOR nella sua Storia delle Matematiche. Prima dell' invenzione del calcolo infinitesimale (dovuta principalmente al genio di Leibniz) sopperivano in parte agli uffici di questo i varî metodi così detti d' esaustione, degli indivisibili, delle tangenti, dei massimi e minimi, ecc: tutti, per altro, così artifiziosi e manchevoli, che a bene usarli richiedevasi poco meno che il genio dei loro grandi scopritori. Un illustre matematico olandese, l' HUIGENS, che tutti li dominava nella vastità del suo ingegno, mosse all' incirca quest' objezione al Leibniz: Dove Voi giungete col Vostro algoritmo degli infinitamente piccoli, io giungo del pari co' miei artifizî geometrici; e non c' è problema da Voi trattato, ch' io non sappia risolver con gli altri processi a me noti. Rispose il Leibniz: E similmente per designare la potenza $m.^{ma}$ di a molti scrivono ancora $a\ a\ a\ a\ a.......a$, m volte di seguito, invece

(*) Loc. cit., III, 79.

di tenersi alla notazione cartesiana a^m; e nondimeno finiscon per giungere, presto o tardi, agli stessi risultati: ma chi vorrà mai contestare la superiorità e l'eccellenza della seconda maniera di scrivere ?

Altri vorrebbe condannare la Logica algebrica all' infallibilità perpetua e assoluta: " La Logistica ci costrin-
" ge a dir tutto quello che per solito si sottintende, a
" progredire per passi: mezzo forse un po' più sicuro,
" ma non certo più rapido. Non sono ali quelle che voi
" ci date, ma dande. E allora abbiamo il diritto di esi-
" gere che queste dande c' impediscan di cadere, per-
" chè altra scusa non meritano...... Voi sarete infallibili,
" o non sarete. Non avete il diritto di dire: noi si sbaglia,
" ma voi pure sbagliate. Sbagliare è per noi una di-
" sgrazia, una morte per voi. „ (*)

Ma è lungi dal mio pensiero il diffondermi in apologie o controversie; e chiedo anzi perdono, se non potrò sempre astenermi dal sentenziare, dove son giudice e parte. Piuttosto è da chiarire un po' meglio i rapporti di codesto indirizzo col movimento matematico odierno.

***

Fino a mezzo il secolo XIX la Logica e la Matematica vissero al tutto distinte, e quasi straniere l' una di fronte all'altra. La Logica pareva esser contenta al ristretto dominio, assegnato a Lei da Aristotile — cioè

(*) H. Poincaré, '*Les mathématiques et la Logique*', Revue de Métaphysique et de Morale, Maggio 1906, p. 295-96.

lo studio delle relazioni d'inclusione e di predicazione fra concetti generali ed astratti — e, non ostante i tentativi (ignorati, o non fortunati) di Jungius e Leibniz, e dei loro discepoli, nulla poteva far presagire una sua rinascenza, o un suo sviluppo ulteriore. Dal canto loro le matematiche formavano una collezione di scienze speciali d' indole tecnica — scienza del numero, della quantità, dell' estensione, del moto — collegate fra loro sopra tutto dalla comunanza del metodo. Ma come il Pascal segnalava a' suoi tempi (e molti di noi constatammo, non senza stupore, all' inizio dei nostri studî) codesto metodo deduttivo proprio delle matematiche era quasi straniero alla Logica formale, che nondimeno presumeva studiare ogni foggia di raziocinio. Esisteva dunque implicitamente, sino ab antiquo, una *logica matematica* al tutto indipendente e remota dalla Logica classica o sillogistica, palesatasi da gran tempo incapace di render conto dei raziocinii matematici: e i filosofi non sapevano altrimenti spiegare codesta dualità, che appellandosi ad una cotal distinzione fra logica di *qualità* e logica di *quantità*; ma senza troppo indagare il come e il perchè d' un così deplorevole contrasto. (*)

Siffatta condizione di cose cambiò sostanzialmente dal 1850 in poi. Da un lato i matematici furon presi da scrupoli logici ignoti fino a quel tempo; e per impulso di Cauchy, Abel, V. Staudt, Weierstrass, Kronecker,

(*) L. Couturat, '*Les principes des mathématiques*', Paris 1905. (Introduction).

G. Cantor ed altre menti di eletta indole critica, essi si dettero ad analizzare i loro processi dimostrativi, a rivedere la catena dei loro teoremi, a indagare e notare tutte le ipotesi che s' eran di nascosto insinuate nei loro raziocini: in somma a scalcinar le pareti e a scoprire i fondamenti dei loro edifizî speculativi, per costatarne la maggiore o minor solidità e resistenza. L'analisi infinitesimale, i cui principî serbavano ancora qualcosa di misterioso e di paradossale, fu definitivamente stabilita sulla dottrina rigorosa dei limiti; la teoria delle funzioni fu approfondita e liberata da molti pregiudizi d' origine intuitiva: onde il maraviglioso e proteiforme sistema dell' *analisi matematica astratta* si palesò capace di reggersi tutto sul concetto di numero intero e sugli assiomi aritmetici; e potè constatarsi in modo non dubbio la insufficienza dell' intuizione, come principio e fonte delle nostre conoscenze intorno al numero e alla quantità. La Geometria e la Dinamica, spogliate a poco per volta d'ogni elemento intuitivo, divennero infine veri *sistemi ipotetico-deduttivi:* dove — premesso un certo numero d'assiomi e postulati (che possono anche dissimularsi, sotto veste di definizioni) — tutto il resto procede per sola virtù del discorso razionale.

Nacquero e si organizzarono la geometria di posizione, la dottrina degli aggregati e dei gruppi di trasformazioni (tre colonne della odierna matematica pura): da cui si manifestò che le scienze del *numero* e della *grandezza* non erano già primordiali — come si stimò lungo tempo — ma che anzi riposavano sopra dottrine di carat-

tere piuttosto *logico* che *matematico*, e sopra nozioni che nulla avevano di *quantitativo (*)*.

Dall' altro canto la Logica, specialmente per opera di matematici, usciva proprio in quel tempo dal suo torpore secolare (**). Dapprima, accorgendosi di non aver nemmeno esplorato e dissodato l'intero campo, dove Aristotile l'avea circoscritta, scopriva nel ristretto dominio delle relazioni d'inclusione fra concetti ben altre forme di deduzione, che i troppi famosi *modi del sillogismo;* quattro dei quali su diciannove — e cioè le forme in Darapti, Bramantip, Fesapo e Felapton — si trovaron fallaci, ove non si congiunga alle due premesse una certa proposizione esistenziale (***). Appresso, ispirandosi ai metodi e al simbolismo dell' Algebra, la Logica formale si costituiva, per la prima volta dopo Leibniz, sotto il duplice aspetto d' un Calcolo delle *classi* e d' un Calcolo delle *proposizioni:* due indirizzi paralleli, dove spuntano analogie mirabili; il primo dei quali è più elementare e si scosta meno dalla logica classica, dove l' altro (che oggi tende a prevalere) è più generale e va più lontano. — Di più, considerando che la mente nostra — così nella vita quotidiana, come nell' investigazione scientifica — ha da operare con ben altre relazioni, che non

---

(*) Primo ad esser consapevole di codesta verità fu *Giorgio Boole* (uno tra i fondatori del calcolo logico) che sino dal 1854 affermava « *non appartenere all'essenza delle matematiche l'idea di numero e di quantità* » (*Laws of Thought*, p. 12, Prefazione).

(**) L. Couturat, ibidem.

(***) V. p. es. Mac Coll. '*La Logique symbolique et ses applications*'. Congrès intern. de Phylos., Paris, 1900.

son quelle d' inclusione e di predicazione fra concetti, la Logica intraprendeva a notomizzare e classificare ogni sorta di relazioni, e a studiarne quelle proprietà formali, che le rendon capaci di deduzione: e assumeva pertanto il carattere universale di *Logica delle relazioni* nel quale si va confermando ogni giorno, se stiamo ai più recenti lavori di SCHRÖDER, PORESKI, WHITEHEAD, RUSSEL ed altri. E poichè le relazioni più semplici e più suggestive sono appunto quelle, che intercedono fra gli oggetti a contorni ben definiti delle discipline matematiche, si applicò dapprima il nuovo istrumento a codeste discipline: non solo recandovi il contributo di più sicuri metodi e di più potenti mezzi d' analisi; ma sì ancora (che non val forse meno) tutti gli spiriti e gli abiti intellettuali del nuovo indirizzo logistico.

Così nasceva e si sviluppava intorno ai principii delle matematiche pure una bella fioritura di ricerche, condotte secondo i nuovi intenti e le nuove esigenze da un' eletta schiera di giovani — specialmente Inglesi, Italiani e Nord-Americani — fra i quali mi è caro ricordare i nomi di C. BURALI, G. FANO, G. FREGE, H. G. HUNGTINGTON, PH. JOURDAIN, E. H. MOORE, G. PEANO, A. PADOA, B. RUSSEL, J. ROYCE, O. VEBLEN, G. VAILATI, G. VACCA, A. N. WHITEHEAD. E ne risultò che il carattere di dottrina meramente formale, impresso fino ab antico nella Logica deduttiva, si poteva ormai riconoscere, più o meno palesemente, nell'Aritmetica, nell' Algebra dei numeri reali e complessi, nella Megatologia, e — quel che più conta — in ogni ramo del grande albero geometri-

co e in buona parte della Meccanica, dove per lo innanzi regnavano senza contrasto l'evidenza intuitiva e il giudizio sintetico a priori.

Per questa via si compieva ai nostri giorni il connubio o, a dir meglio, la fusione della Logica con la Matematica pura. Non si discerne più bene dove finisca la logica e dove cominci la matematica; nè si distinguon fra loro queste discipline, fuorchè dicendo con BERTRANDO RUSSEL (*) che " la Logica costituisce la parte più ge-
" nerale della Matematica, e la Matematica consiste nel-
" l'applicazione dei principii logici a certe speciali re-
" lazioni. „ Alla qual conclusione molto si accosta H. FEHR, segnalando che " dei non pochi nè scarsi progressi compiuti dalla Logica nel secolo scorso dobbiamo esser grati ai matematici, e all'interesse che pongono sì nell'analisi logica della loro scienza, sì nella ricerca dei suoi principii: i quali ordini di studio cospirano insieme a mostrarci, che la Logica è dottrina matematica per la sua forma, e la Matematica è dottrina logica per il suo metodo; onde procede e si effettua l'unione, se non l'unità, di queste due discipline (**) „

***

Già un terzo di secolo fa BENIAMINO PEIRCE definiva le Matematiche per quelle scienze che traggono conclusioni *necessarie* (o, come altri direbbe, *a priori*), fa-

(*) ' *The principles of Mathematics* ', Cambridge, 1903, I, 9.

(**) ' *Sur la fusion progressive de la Logique et des Mathématiques* ', Congrès internat. de Phylos., Génève, 1904.

cendo un sol corpo di tutte le discipline deduttive (*). E invero si scopre sempre qualche elemento matematico in ogni processo deduttivo; anzi in qualunque operazione, dove il ragionare con precisione e rigore abbia luogo ed ufficio non trascurabile. Qualunque soggetto divien capace di trattamento matematico, non appena si scorgono in esso dati certi e precisi, onde possan ritrarsi conseguenze per via di puro raziocinio. Che quei dati si prestino ad esser valutati, elaborati e plasmati in modo *quantitativo*, anzichè *qualitativo* (così da potervi introdurre la *misura)* è circostanza bensì favorevole, ma non propriamente necessaria perchè una dottrina acquisti carattere matematico: di guisa che per es., quando anche gli psicologi non riuscissero a fornirci esatte *misure* in ordine alle sensazioni, volizioni ed altri fatti di lor competenza, non sarebbe esclusa per questo la possibilità d'una psicologia matematica (**). Notammo già di passaggio, che alcune parti della matematica odierna — come la geometria di posizione e la dottrina generale dei gruppi di trasformazioni — si son rese al tutto indipendenti dalle nozioni di grandezza e di misura. L'elemento matematico potrà consistere, ad es., nel solo fatto che una medesima proprietà non si offra per solito come isolata da tutto il resto, ma figuri ad un tempo in parecchi dati e in diverse proposizioni, per mezzo delle quali essa venga a connettersi con altre proprietà: basta

(*) ' *Linear associative algebra* ', 1870.

(**) M. Bôcher, ' *The fundam. conceptions a. methods of Mathematics* ', Bull. of the Amer. Math. Society, XI_2, 118.

allora il solo processo logico della deduzione per riconoscere in queste altre proprietà l'esistenza di nuovi legami e di nuove connessioni.

Una dottrina costituita per intero da proprietà sconnesse ed autonome (come son molte leggi così dette *empiriche*) offrirebbe l'aspetto d'un catalogo di proposizioni, ciascuna emergente da un peculiar gruppo di osservazioni ed esperienze; e inetta pertanto a servir di riscontro alle altre, o a comunicar loro quel maggior grado di credibilità o sicurezza, di cui eventualmente godesse. Benchè in diversa misura, la più parte delle scienze si scostano assai da questo tipo estremo; e tanto più ciascuna, quanto più sono frequenti in essa le proposizioni atte ad esser ravvicinate fra loro in modo da far risaltare, che uno stesso fenomeno A, p. es., abbia qualche relazione determinata e costante con altri fenomeni B, C, ecc. Le scienze, dove questa condizione è talmente soddisfatta, che niuna proposizione vi figuri come isolata e abbandonata a sè stessa, sono spinte dalla legge del minimo sforzo ad organizzarsi in sistemi di conseguenze prontamente deducibili, per sola magia del discorso, da alcuni gruppi di proposizioni fondamentali opportunamente scelte (assiomi o proposizioni primitive); e acquistan pertanto il carattere di scienze *deduttive* (*). In breve, possiam dire che una dottrina s'avvia per lo stadio deduttivo, allorchè diviene in qualche modo capace di atteggiarsi, costituirsi e ampliar-

(*) G. Vailati, '*Il metodo deduttivo come strumento di ricerca*'. Torino, 1898, p. 32.

si ' more geometrico ' : come oggi interviene p. es. alla Chimica e all'Economia politica, e non è forse lontano dal verificarsi in qualche ramo di Biologia e di Linguistica. Ma, dove per es. nella Chimica l'elemento matematico (quantunque vi abbia raggiunto proporzioni ragguardevoli) è tuttavia subordinato, prevale esso ormai d'ogni parte nella Fisica, e da gran tempo s'impone all'Astronomia — che ambedue ci offron magnifici esempi di teorie deduttive.

Che poi la deduzione abbia potuto affermare da secoli un pieno ed assoluto dominio sulla Geometria — e in generale sulle scienze matematiche — non farà meraviglia, se si considera che gli assiomi e le relazioni d'ogni disciplina puramente matematica possiedono in grado eccellente codeste qualità associative e quel certo potere di combinazione, a cui poc'anzi alludevo: virtù che tanto conferiscono alla fecondità ed efficacia del metodo deduttivo. E invero, relazioni come quelle che si designano con le frasi " è *uguale a* „ " è *maggiore di* „, " è *funzione di* „, " è *projettivo a* „, ecc., sono tali, che dal loro intercedere fra una quantità o figura ed un'altra, e fra questa seconda e una terza, si può tosto inferire il loro sussistere fra la prima e la terza, senz'uopo di alcuna constatazione diretta (*).

***

Ma v'è qualcosa di più perfetto di là dallo stadio deduttivo, quale si offre, a mo' d'esempio, nell'Astrono-

(*) G. Vailati, ibidem.

mia, nella Cristallografia, nell'Ottica geometrica: e questo è lo stadio *formale*, o *logistico*. Le materie prime dell' Astronomia, dell' Ottica, dell' Economia, ecc., ci son tutte fornite immediatamente dall' esperienza; e non sempre si posson pensare le leggi di queste dottrine facendo astrazione dal *senso* fisico e concreto dei termini, che ne rappresentan gli oggetti — come *materia*, *gravitazione*, *luce*, *cristallo*, *moneta*, etc. — laddove, se consideriamo ad es. l' Aritmetica o la Geometria, vedremo che, senza venir meno ai postulati di queste scienze, è lecito (e spesso anche opportuno) attribuire alle parole che ne rappresentano i concetti primordiali — come sarebber qui *numero intero* e *successivo di un numero*, *punto* e *congiungente due punti*, ecc. — parecchi significati diversi fra loro, ed anche molto remoti dal senso conferito a que' termini dall' ordinaria intuizione di spazio e di numero. Insomma la Geometria, come l' Aritmetica, possono stare e vivere indipendentemente da ogni speciale interpetrazione de' loro concetti primitivi: in esse la forma prevale così sulla sostanza, che da questa si può anche astrarre, volendo: laddove il simile non si potrebbe dire oggi di varie altre discipline deduttive. Guardando alla materia, vediamo bensì che l' Aritmetica abbraccia e contempla ne' suoi schemi tutto quanto il *numerabile* (o che si possa far corrispondere a numeri), la Geometria tutto quanto il *figurabile* (o che si possa rappresentare per punti e figure); ma non è tolta per questo la facoltà di concepir l' una e l' altra come *studio formale d' un certo ordine di relazioni logiche:* posto che

nè anche la Logica perde la sua qualità di dottrina formale per eccellenza, in quanto si definisca nei rispetti della materia (seguendo p. es. l'Itelson (*)), " come scienza degli oggetti in generale, reali o no, possibili ed impossibili, senza riguardo all' esistere. „

La natura formale d' una disciplina sta in ciò massimamente, che gli oggetti vi compariscon solo per quel che hanno di comune, e sotto relazioni, dove si comportano nello stesso modo. Così l' impronta che meglio distingue gli oggetti matematici par che sia l'idea d'*ordine;* onde la Matematica si potrà concepire come dottrina degli oggetti ordinati: ma se poi riflettiamo che nello studio puramente matematico di un tutto comunque ordinato si suol trascurar la natura degli enti che lo compongono, per non considerarne che l' ordine e le relazioni a cui questo è dovuto, saremo indotti a veder piuttosto nella Matematica — o almeno nella sua parte più evoluta—una *dottrina dell'ordine, una scienza formale di relazioni d' ordine:* relazioni che spettano di buon diritto alla Logica per la loro forma, nel modo stesso che le leggi fisiche appartengono, per la forma, alla Matematica.

Perciò, rispetto ad alcune parti della Matematica, la concezione di B. Peirce pare oggidì superata: e non può negarsi che i lavori della Scuola logico-matematica abbian contribuito a dar linee e contorni precisi al nuo-

---

(*) ' *Sur la Réforme de la Logique* ', II.me Congrès de Phylosophie, Génève, 1904.

vo quadro delle conoscenze matematiche; particolarmente alla distinzione fra matematiche *pure* e matematiche *applicate*. In sostanza il PEIRCE, con la più parte dei filosofi, concepiva la Geometria, per es., come un ramo di matematica applicata; a un dipresso come *una fisica matematica dell' estensione*, dove i concetti fondamentali non fosser capaci di un contenuto diverso da quello, che ci viene dall' ordinaria intuizione spaziale. Oggi invece — per quanto possa sembrar paradossale — la nozione euclidiana di *punto*, o di *retta*, è straniera alla Geometria pura: la quale contempla un certo schema di relazioni logiche, intercedenti fra oggetti non definiti, che seguitiamo bensì a chiamar punti o rette, ma di cui la natura ci riesce al tutto indifferente. Una tal Geometria non ha più lo *spazio* per argomento: e sempre che la si voglia applicare a uno spazio (reale o ideale) conviene che si definiscano i punti, ricorrendo a mezzi per lo più fisici ed extrageometrici.

Fu un tempo (non molto lontano) nel quale i numeri *negativi* non si concepivano altrimenti che come *debiti*. Qual meraviglia, se oggi ancora stentiamo a separar dall'idea di punto o di retta l'ordinaria rappresentazione spaziale? — Per certo nessuno vorrà negare l'importanza euristica, e molto meno il valore didattico, di codesta interpetrazione concreta degli enti geometrici: ma sostenere (come fa p. es. il KLEIN) che i postulati della Geometria non siano altro che forme rigorose del concetto intuitivo di spazio; nè che spetti loro altro ufficio, tranne quello di imprimere, con suggello razionale, un certo carattere di

stabilità nei fatti dell' intuizione spaziale, sarà forse un attribuire importanza soverchia a una speciale rappresentazione objettiva, facendone quasi una condizione ' sine qua non ' per l'esistenza stessa della Geometria.

Osservate, ad es., che la *moneta* o *numerario* fu per gran tempo, e tuttavia resta, la più familiare e la più intuitiva fra le molteplici interpetrazioni dell'ente *numero*. Or chi ponesse a fondamento della scienza de' numeri codesta rappresentazione, farebbe ad un dipresso come coloro, che non intendono la Geometria se non quale scienza dei fatti inerenti all'intuizione spaziale. Fra i molti aspetti dell' ente geometrico puro l'*estensione* sarà indubbiamente quello a cui spetta il maggior interesse pratico: ma esso non è la Geometria, come la Contabilità non è l' Aritmetica (*).

*
* *

Verso lo stadio puramente deduttivo o formale tendono quasi tutte le scienze capaci di evolversi oltre lo stadio positivo: le quali si vedono infatti trasformare sè stesse man mano dalla condizione di dottrine del *reale* in quella di dottrine del *possibile*. Codesta evoluzione è oggi palese, ad es., nei fondamenti della Meccanica; dove si scorge un movimento simile a quello, che sessant'anni addietro produsse le *Geometrie non-Euclidiane*. Come allora si cominciò a dubitare che gli assiomi della Geome-

---

(*) M. Pieri ' *Sur la Géometrie envisagée comme un système purement logique* ', Congrès intern. de Phylos., Paris, 1900.

tria, e in particolare l'assioma delle parallele, non avesser carattere di necessità gnoseologica; e si costruirono infatti Geometrie indipendenti da quel postulato, e però non sempre d'accordo con l'intuizione Euclidèa dello spazio (Geometrie, dove sol per approssimazione e in regioni dello spazio non troppo estese accade, p. es., che la somma degli angoli d'un triangolo equivalga a due angoli retti) così ora si comincia a parlare di *varie Dinamiche possibili*, di Dinamiche *non-Newtoniane* indipendenti dal principio generale d'inerzia, e dove questo vale soltanto *in modo approssimativo* e per velocità *piccole abbastanza*; ecc., ecc. Invero le conclusioni ultime circa l' interpetrazione meccanica dei fatti naturali, e segnatamente i progressi dell' Ottica elettro-magnetica, portano senz'altro a negare il principio Newtoniano dell'azione uguale e contraria alla reazione (almeno nel suo significato positivo, cioè in relazione con la natura ponderabile); quindi anche a negare il principio generale d'inerzia: e per una nuova Dinamica elettrica consigliano di sostituire alle azioni *a distanza* le azioni *per contiguità* governate da qualche altro principio (*). E, come in luogo del postulato d' Euclide s'introdusser le ipotesi di LOBACEFSKI e di RIEMANN, così vediamo oggi postulare, invece del principio generale d'inerzia, un' *ipotesi di eredità* (secondo la pittoresca locuzione di Robin e Picard)—la quale è che il movimento futuro d' un punto materiale in un campo di

---

(*) Ved. F. ENRIQUES, '*Sui principi della Meccanica*' Atti dell'Istituto di Bologna, 1906.

forze dipenda da tutto il movimento passato (ipotesi suggerita specialmente dai fenomeni d'isteresi)—oppure una *ipotesi di solidarietà*, per la quale il campo di forze, lungi dall'essere indipendente dal punto isolato che si muove, subirebbe nel moto una variazione locale progressiva, come se fosse occupato da un mezzo partecipe del movimento generato da quello (ipotesi che appunto si affaccia nella nuova dinamica degli elettroni).

***

Se nel considerare il lato puramente *formale* delle discipline matematiche si perde di vista — o addirittura si esclude—ogni materia reale o possibile delle loro implicazioni, si cade in quel difetto che chiaman *nominalismo:* la cui forma genuina consisterebbe nel credere o supporre di aver dinanzi un complesso di simboli e di convenzioni arbitrarie, vuote di contenuto e senza alcun valore oggettivo. Questa è infatti la taccia, nella quale incorrono più di frequente i matematici, con la tendenza a foggiar da sè stessi il loro mondo, a riguardare le idee matematiche come pure creazioni della mente. “ La formazione dei concetti matematici è un atto pienamente libero —dice G. Cantor — *salva soltanto la compatibilità d'ogni concetto coi rimanenti* „ (*): se non che i matematici non sempre si curarono di rispettare questa condizione alla lettera, la qual cosa avrebbe fornito loro senz'altro alcun che di esistente nella sfera di quei concetti.

Pur sarebbe ingiusto il tacere, che un tal peccato non

(*) ‘ *Grundl. e. allg. Mannichfaltigkeitslehre* ', Leipzig. 1883. p. 18-20.

potè mai partorire effettivamente alcun danno alla pratica, nè alla dottrina: in grazia forse di quella certa armonia, che (secondo B. Spinoza) fa sì che le operazioni del nostro intelletto siano a priori intonate coi fenomeni dell' universo. Per es. quegli enti, che poi si chiamaron *quantità immaginarie*, non eran dapprima che meri simboli di *non esistenza;* e pretto nominalismo fu l'ostinazione dei matematici nel conferire ai medesimi certe proprietà formali e nell' operar su di essi, come se celassero qualche substrato reale. Or bene, in oggi le interpetrazioni tangibili e le applicazioni positive di que' ' giuochi di parole ' non si contano più! — Che cosa di più arbitrario e convenzionale delle regole d'un giuoco, d'onde si traggono spesso deduzioni su deduzioni, prive d' ogni senso reale? Eppure il *calcolo delle probabilità*, così largo di aiuti all' esperienza e fondamento del metodo statistico dei grandi numeri, ebbe origine da questioni relative a dadi e a giuochi di carte.

È fuor di dubbio che i matematici vanno assumendo, di giorno in giorno atteggiamenti sempre più nominalistici; ma non è più tempo oramai di quel nominalismo grossolano ed empirico, che dall' Hobbes si concepiva presso a poco nei termini che ho detto sopra; bensì del trattare e maneggiar come simboli gli oggetti dell'investigazione matematica, ragionando in questa maniera: " Se nell' universo fisico o mentale esiste un quid, che soddisfaccia alle condizioni da me imposte a que' simboli, per esso dovranno verificarsi i tali e tali altri fatti da me dimostrati ". Oppure: " Le mie premesse sono da

aversi per compatibili, sino a prova in contrario „. Ora è chiaro, che altro è negare e disconoscere ai simboli qualsivoglia contenuto reale o possibile, altro è — come quì—trascurare ogni loro interpetrazione speciale; e operar su di essi prima ancora di conoscerne il senso reale, e senza inquietarsi perchè non pajano aver corpo oggi, e non trovin per ora alcun riscontro positivo nei fatti.

Il peggio che possa accadergli—direte Voi, o Signori—sarà di perdere il tempo. Ma il nominalista risponde, non senza ragione, che il mondo immaginario in cui vive è pieno d' attrattive per lui; ch'egli fa l'arte per l'arte, e che la soddisfazione e l'onore dell' ingegno umano son fini più che bastanti a giustificare qualunque ricerca scientifica. Nè io saprei dargli torto. Voi fate la scienza del reale — egli dice—noi moviamo a ricercare il possibile. A voi basta acconciarvi alle cose che esistono, così da cavarne il miglior partito pei vostri bisogni; la vostra sapienza mira sopra tutto a prevedere ciò che sarà per succedere, a somiglianza di quanto è accaduto in addietro o che suole accadere al presente: noi per di più ci occupiamo di quel che accadrebbe, se certe condizioni si avverassero, se tale o tal altra parte della realtà si modificasse. Negherete di darci ascolto, proprio ora che da più parti si cerca di ridere a spese di quelle tali objettività e realtà, che sapete...? Meditiamo insieme, piuttosto, al “ Tu solo, o ideal, sei vero.... „ del sommo Poeta.

***

Ogni dottrina deduttiva ripete l' esser suo, la sua vita da quel processo intellettuale che va sotto il nome ge-

nerico di sillogismo (in senso lato), implicazione, inferenza;. e che permette di trarre illazioni necessarie da due o più promesse. Or che cosa dovrà intendersi per conclusioni *necessarie?*

Allo stato presente della critica, non par che si possa rispondere in modo assoluto. Le varie tendenze filosofiche circa il modo di concepir la natura e gli uffici della ragione potranno dar forse qualche lume in proposito: il matematico sospende il giudizio; pago, se il paragone e l' analisi dei vari tipi di raziocinio, sanzionati dall'uso di molti secoli, gli consentono di riconoscere un certo numero di fatti generali e costanti come *norme* della ragion deduttiva; e se può coordinarli in un tutto coerente ed armonico. Così è che i logici-matematici — da Boole sino a C. S. Peirce, a Schröder, a Peano, a Russel — riuscirono dapprima a compilare un elenco, indi a formare un corpo di nozioni e principî, da cui par che dipenda ogni efficacia e virtù di ragionamento. I frutti migliori diede lo studio delle varie fogge di argomentazione e d'illazione familiari alle scienze matematiche: nè vi sono ormai discrepanze fra i risultati, benchè l'opera non possa dirsi anche perfetta.

È credenza generale e ben fondata, che la Matematica ripeta la sua certezza dall'intima comunione con le leggi *immutabili* della Logica, ossia coi principî costitutivi della ragione: ma non sarebbe forse men vero il soggiungere che — viceversa — la stabilità e permanenza di questi principî derivi in gran parte dall'essere stati così lungo tempo cimentati e temprati coll' uso delle scienze

matematiche. Non si tratterebbe, se mai, d'un circolo vizioso; bensì d'un intreccio di eventi capaci di determinarsi a vicenda; nel quale parve anzi ad alcuno di ravvisare come un saggio eloquente e nativo di quel processo, che i matematici odierni chiamano *per approssimazioni successive* (*). Non vediamo noi l'esperienza modificar senza tregua i nostri concetti fisici; e questi, così modificati, condurre man mano a nuove previsioni e e a nuove esperienze: e così, per via di approssimazioni successive, i concetti divenir sempre più maneggevoli e le esperienze più conclusive? — Tutto sta che il processo sia *convergente:* e qui si può creder che sia, per ragioni induttive e storiche. E chi sa che in modo simile a questo non siasi costituito, afforzato ed affinato in noi stessi il poter deduttivo? — Se così fosse, anche gli assiomi logici avrebber carattere strumentale, e la loro vantata necessità diverrebbe illusoria.

Si adduce in proposito, che non di rado anche uomini insigni, persino fra i matematici, dissentirono circa il valore o l'esattezza di qualche ragionamento; e che certe fogge d'argomentare, avute un tempo per buone, non appagano più le esigenze moderne: per es. il grand'uso che si faceva una volta dell'intuizione geometrica e meccanica nel ricavar conseguenze, che non si stimaron per questo meno apodittiche, o men necessarie delle altre. Se non che il dissenso par che volgesse non tanto sulla bontà e verità dei principî, quanto sull'uso — non sempre di-

---

(*) M. Bôcher, ' *The foundam. conceptions* etc (loc. cit.), p. 120.

sciplinato e legittimo — che potè farsi di quelli. Così se oggi escludiamo che l'intuizione possa giustificare una deduzione rigorosa, gli è solo perchè vogliamo, che il ragionamento proceda secondo norme precise e leggi ben definite; dove l'intuizione fu sempre ribelle a codesta disciplina, rifuggendo per sua natura da qualunque determinazione.

Che delle successive conquiste della Matematica nessuna ha distrutto le precedenti; che nel progressivo sviluppo delle discipline matematiche nulla vi è stato da rinnegare, nulla da mutare sostanzialmente; che il trionfo di concetti nuovi non ha mai propriamente infirmato le verità già acquisite: questi fatti trovan la lor ragione nella cura costante, che i matematici posero a non discostarsi mai da quei pochi processi logici, che sono stati seguiti spontaneamente, naturalmente, senza discussione e senza eccezione, da tutti gli uomini, in tutti i tempi, in tutti i luoghi (*). Ma con tutto ciò (si osserva) non è tolto assolutamente il pericolo, che i modi e le forme di raziocinio, da noi ricevuti e adoperati con tanta fiducia, ci facciano urtare un bel giorno in qualche contraddizione: onde per lo meno avverrebbe che certi assiomi logici, i quali ora stimiamo validi universalmente, in realtà sarebber soggetti a qualche restrizione. Un tal dubbio non è *logicamente* impugnabile; non avendosi pur troppo alcun mezzo di escludere a priori (ossia con la stessa certezza di un teorema logico) la possibilità d'un evento

(*) E. D'Ovidio, '*Uno sguardo alle origini* etc.' (loc. cit.), p. 35.

così sgradevole. Non si può avere una *certezza* apodittica della *compatibilità* o *consistenza* di tutte insieme le premesse inerenti al discorso; in quanto per concluder che gli assiomi logici A, B, C,... sono immuni da ogni germe di contradizione, bisogni esser certi che i princìpi A', B', C',... su cui poggia la dimostrazione sono essi stessi compatibili: la qual cosa richiede a sua volta una nuova dimostrazione; e così via senza speranza di uscita, come il cane che insegue la propria coda.

A dar credito all'objezione suddetta molto ha contribuito la recente scoperta di alcune antinomie e contradizioni nella teoria degli aggregati e dei numeri trasfiniti. Sono argomento di valorose discussioni i paradossi del Burali-Forti, del Richard, di Zermelo-König. Illustri matematici e filosofi prendono parte alla disputa: e già qualcuno ne trasse motivo a dichiarare il fallimento delle nuove tendenze logistiche. Se non che bisogna guardarsi dall'esagerar l'importanza d'un fatto tutt'altro che nuovo alla storia delle scienze. Antinomie occorsero in Matematica più d'una volta, e tutte ricevvero prima o poi soluzione adeguata; in tutte si trovò, prima o poi, qualche errore di raziocinio. È celebre tra i filosofi greci la contradizione di *Achille e della testuggine*, dipendente dalla relazione

$$1 = {}^1|_2 + {}^1|_4 + {}^1|_8 + \dots \text{ in infinito;}$$

dove l'unità è posta eguale ad un numero, che varia restando sempre minore di 1. Nel secolo XVII fu grande oggetto di controversia la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots\dots \text{ in infinito,}$$

la cui somma vale 1, 0, 1|2 o non ha valore determinato, secondo il criterio che si adotta nel definire il *limite* in generale e la somma d' infiniti numeri. In ambo gli esempi disparve ogni contradizione, quando fu nota una esatta definizione del *limite:* ond' è verosimile, che la presenza d' idee non ancora ben definite sia la sola cagione, che ci permette talvolta di spinger qualche dottrina poco matura a conseguenze non conciliabili fra loro.

Tutte le antiche e moderne antinomie derivano, per un verso o per l' altro, dal considerar l' *infinito;* che per ciò appunto alcuni (i finitisti, come il Renouvier) vorrebbero escluder senz' altro dal dominio della ragione. Consiglio prudente, ma vano; atteso che l' infinito è nella natura di troppe quistioni, e " naturam expellas furca, tamen usque recurret „. (*) Concetti d' una sfera così vasta, che parve già sogno il presumere di segnarne con precisione i confini, son oggi divenuti logicamente maneggevoli, e prestano ottimi servigi alla ragion deduttiva. Certi altri — come " tutto il pensabile „, " tutto ciò che non è numero „, e simili — par che abbiano in sè veramente alcun che di vago e d' indefinito; e non è meraviglia, se partoriscono equivoci. Le concezioni ed operazioni matematiche si estendono ad ogni classe *finita* di enti, e a certe classi *infinite*, che si posson chiamar " transfinite „: ma è fuor di dubbio che esistono ancora innumerevoli classi, a cui non sono applicabili.

(*) G. Peano, ' *Super theorema de Cantor-Bernstein* ', Rev. de Math., VIII, 143-45 (1906).

Con tutto ciò molti indizi fanno ormai presagire, che in questa parte ancora le difficoltà saranno presto appianate o rimosse, pur senza danno del patrimonio acquisito — salvo forse qualche ritocco in certe novità troppo ardite. Da una parte vediamo Filippo Jourdain discutere e spiegare in modo esauriente — con le rigorose cautele del processo logistico — la contradizione del Burali-Forti e quella più generale e più semplice costruita dal Russel (*); mentre il Peano suggerisce una soluzione molto ingegnosa e felice del paradosso di Richard (**). Dall'altra parte il Russel (***) dimostra la possibilità di bandire la nozione di classe, o aggregato (nel senso più generale) dai fondamenti della Logica, facendo sostener tutto il peso dell' edifizio al concetto di *relazione*: riforma che, senza scioglier l'enimma, lo sopprimerebbe addirittura, estirpando dalla radice tutti quei paradossi. Ma, senza venire a tali estremi, il Jourdain (loc. cit.) riesce in sostanza a determinare quand' è che una classe è immune da contradizioni; e così allo studio matematico degli aggregati viene ad essere imposto un limite ben definito (che si tocca, prima di giungere a quel che potrebbe chiamarsi ' infinito assoluto ').

Ho ferma opinione, che i metodi proposti dal Jourdain e dal Russel riusciranno a salvare (anzi a porre in

---

(*) ' *De infinito in Mathematica* ', Rev. de Mathem., VIII, 1906.

(**) ' *Super theorema de Cantor-Bernstein* ', loc. cit., p. 155.

(***) ' *The theorie of implication* ', Americ. Journ of Math., XXVIII, (1906). ' *Les paradoxes de la Logique* ', Revue de Métaphys. et de Morale, Septembre 1906.

miglior luce) quasi tutti i risultati del CANTOR: ma, quando anche non si giungesse ad escluder da queste altezze ogni traccia di contradizione, e ci convenisse sfrondare una parte della dottrina dei numeri transfiniti, o recidere qualche altro giovane rampollo del grande albero matematico, la Critica ci ha da gran tempo avvezzi a ben altri pentimenti e a ben altre rinunzie! Eppure ci fu chi non dubitò di ascrivere a demerito dei logici-matematici l' aver concorso a mettere in luce codeste difficoltà e ad agitarle; quasi che a loro fosse imputabile l' esistenza di così fatte antinomie.

***

Tutti sanno che ogni teorema di matematica è subordinato a certe condizioni od ipotesi, — esplicite o no — che ne definiscono il campo di validità. Un teorema è vero, qualunque volta ne sian verificate le ipotesi: il che fa già intravedere il carattere logico, o formale, delle verità matematiche, e il genere di valore che queste posseggono — valore, che si potrebbe anche qualificare come una *necessitá ipotetica* (*). Gli studi logico-matematici intorno alle varie discipline deduttive cercano appunto di dar risalto a questo carattere e di scoprirlo dove non è palese, organizzando ciascuna di quelle (fin dove è possibile) secondo uno o più *sistemi ipotetico-deduttivi*.

Un ordine di proposizioni, la verità delle quali riposi unicamente su certi postulati od ipotesi peculiari a cia-

---

(*) *L. Couturat*, ' *Les princ. des Mathém* '. (loc. cit.) pag. 4.

scuna disciplina e sugli assiomi logici; di guisa che il tutto si svolga per virtù propria da questi soli principii, combinati algebricamente fra loro a tenor delle leggi e dei canoni che informano il calcolo logico: tale, a un dipresso, il ' sistema ipotetico-deduttivo '.

Il processo algoritmico porta non solo a distinguere organicamente i giudizi a priori, o primitivi, da quelli derivati, o dedotti — insomma gli assiomi e postulati dai teoremi — ma così anche e nella stessa misura (fra le nozioni intorno a cui versano questi giudizi) le idee primitive, o indecomposte, da quelle che ne sono riproduzioni e derivazioni formali, e che insomma risultano effettivamente composte mediante le prime, combinate fra loro e con le categorie della Logica. Le due distinzioni sono in verità molto affini, e la seconda non è meno antica dell' altra, nè par che le spetti un valore molto diverso: ma con tutto ciò non l'è stata riconosciuta praticamente un' eguale importanza prima dei nostri tempi. Si cercava bensì di ridurre al minor numero gli assiomi e i postulati, ma per lo più senza porre studio di sorta nel definire tutti gli elementi che occorrono ad una trattazione deduttiva col minor numero possibile d' idee fondamentali: onde il vantaggio, che si acquistò per un lato, si perdè bene spesso dall'altro, atteso il numero e la qualità delle idee primitive, a cui si volle raccomandato il sistema. (Così, per citare un esempio, benchè sia fuor di dubbio oramai che gli oggetti della Geometria elementare si posson comporre di *due* sole materie prime ideali: per es. il *punto* e la *sfera*, ovvero il *punto* ed

il *moto:* vedemmo pur non è molto proporre al medesimo ufficio di ' Grundbegriffe der Geometrie ' niente meno che le nozioni di Corpo rigido, Parte d'un corpo, Spazio, Parte d'uno spazio, Occupare uno spazio, Tempo, Quiete, Movimento).

Le ricerche logistiche da istituire intorno ai principii d' una disciplina deduttiva consiston pertanto in un duplice lavoro di riduzione: e cioè riduzione di tutti i concetti a poche idee primitive per mezzo di *definizioni* opportune; e riduzione di tutte le proposizioni a un certo numero di postulati o proposiz.[1] primitive attraverso il *processo deduttivo.* Lo studio principale è sulla maggiore o minor convenienza di questa o quella definizione, di tale o di tal altro postulato: ed ha in sè tuttavia qualche cosa di soggettivo e d' arbitrario, in quanto vi sia sempre una certa libertà nella scelta delle nozioni e proposizioni da assumere in officio di primitive. Se non che, giusta il nuovo modo di considerare, non c' è luogo a parlare d' idee ' più semplici ' e di proposizioni ' più evidenti ' che certe altre idee o proposizioni: non vi sono, in fin dei conti, che idee *non definite* e prop.[1] *non dimostrate.*

I logici-matematici non concepiscono la differenza fra le proposizioni primitive e le altre che ne derivano attraverso il processo deduttivo come dovuta all' esser quelle per sè stesse più evidenti, più credibili, meno impugnabili: ma al contrario essi vedono nei postulati delle proposizioni come tutte le altre; la cui scelta può esser diversa, a tenor degli scopi che si voglion raggiungere,

e dipende anzi tutto dal paragone dei vari aspetti che assumerebbe il trattato, secondo il variar delle scelte. Richiamando un' immagine assai felice di G. VAILATI (*) diremo che, se i rapporti fra i postulati e le proposizioni che ne dipendono si potevano un tempo paragonare a quelli che intercedono fra il monarca ed i sudditi d'un governo autocratico; ora invece i postulati, rinunziando a quella specie di diritto divino, di cui pareva investirli la loro vantata evidenza, son divenuti come i capi elettivi d'un regime democratico, la scelta dei quali si deve (o si dovrebbe) alla riconosciuta capacità d'esercitare per qualche tempo una funzione nell'interesse del pubblico.

Sin dal 1882 MAURIZIO PASCH dichiarava che, se la Geometria vuol essere davvero una scienza deduttiva, bisogna che i suoi schemi di raziocinio non dipendano dal significato degli enti geometrici — nel modo stesso che non dipendono da questa o quella figura illustrativa — e che soltanto le relazioni imposte a quegli enti dai postulati fondamentali abbian peso e valore nella deduzione (**). Con ciò veniva Egli a dire in sostanza, che l'ente primitivo di qualsivoglia sistema deduttivo deve esser capace d'interpretazioni arbitrarie, dentro certi confini segnati dalle proposizioni primitive; in modo che il contenuto delle parole o dei segni, che rappresentano qualche soggetto primitivo, sia unicamente determinato

---

(*) ' *Il Pragmatismo e la Logica matem.* ', nella Rivista « Leonardo », Firenze, febbraio '906.

(**) ' *Vorles. üb. neuere Geometrie* ', Leipzig, 1882, p. 98.

dalle proposizioni che versano intorno al medesimo. E anche prima, per influenza di GIULIO PLÜCKER, era già familiare ai Geometri l' uso d' intendere p. es. la parola linea o superficie come aggregato di elementi, di cui non occorre specificar la natura, purchè si sappia che si possono individuare, con legge continua ed univoca, mercè dei valori numerici d' uno o due parametri variabili. Codesta facoltà di astrarre da ogni senso speciale dei concetti primitivi consente di operare simbolicamente sopra espressioni di contenuto instabile; e però di abbracciar col discorso in una sola dottrina generale ed astratta parecchi ordini di oggetti particolari e concreti: a quel modo che la risoluzione d' un solo problema algebrico contempla sempre più casi, non solo diversi numericamente fra loro, ma altresì differenti per la qualità dei loro dati.

***

Come già dissi, la verità o consistenza di tutto il sistema delle premesse logiche non è dimostrabile. Il carattere universale delle dottrine logistiche appare anche in ciò che — mentre il più de' sistemi filosofici disputano intorno al criterio dell' *esistenza* — quelle non presumon dirci che cosa sia il *dato*; ma si restringono a parlar d' esistenza (o della sua negazione, l' *assurdo*) come di un ' quid ' non definito, cui gli assiomi logici impongono certe condizioni: di guisa che, p. es., dall'esistenza nota o supposta di certi oggetti si possa arguir l' esistenza di altri oggetti; ecc. Ora, che i principii su-

premi della ragione tutti convengano fra loro; cioè non accolgano in grembo qualche contradizione latente, è un fatto, che non si può confermare per deduzione (se non forse quanto ad alcuni principii rispetto ad altri, di cui si conceda a priori la consistenza); un fatto, dal quale non si può avere che una certezza *induttiva o storica* (*). Al contrario non è dimostrato ancora che in un dominio di pura logica (inteso con qualche larghezza) non si possa trovare un' immagine o interpretazione dei concetti primitivi — poniamo dell' Aritmetica — per cui tutte quante le proposizioni di questa scienza risultino verificate. Allora — ove si conceda la compatibilità delle premesse logiche—avrem'ottenuto senz'altro una vera e propria *dimostrazione* della compatibilità di codesti assiomi aritmetici, sul fondamento di soli principii logici. E una volta ammessa la consistenza degli assiomi aritmetici e logici, resta poi molto agevole stabilir quella dei postulati inerenti ad altri sistemi deduttivi.

Molti stiman superflua, nella più parte dei casi, una dimostrazione siffatta. Così, p. es., il Peano: " La prova, che i postulati dell' Aritmetica o della Geometria non involgano contradizione di sorta, non è, a parer mio, necessaria; posto che noi non li inventiamo ad arbitrio, ma li scegliamo di tra le proposizioni, che contempla (sia pure implicitamente) ogni trattato d' Aritmetica o di Geometria. La nostra analisi dei principii di queste

---

(*) *M. Pieri*, ' *Sur la compatibilité des axiomes de l' Arithmétique* ', Rev. de Métaphys. et de Morale, aprile 1906.

scienze consiste nel ridurre le affermazioni gratuite al numero minore possibile di giudizi necessarii e sufficienti. Ora il sistema dei postulati aritmetici o geometrici è soddisfatto dall' idea che del numero, o del punto, possiede ogni scrittore d' Aritmetica o di Geometria. Noi pensiamo il numero, dunque il numero esiste. Una prova di consistenza sarà per altro opportuna, allorquando i postulati siano *ipotetici* e non rispondenti a fatti reali (*). „

Che la Logica — e forse anche l' Aritmetica — occupi un posto a parte fra le varie discipline deduttive, appare altresì dal fatto, che per l' intelligenza d' un sistema ipotetico-deduttivo non è propriamente necessario il sapere *di che cosa* si parli, cioè conoscere un senso dei varii concetti primitivi (basta percepire il nesso logico e la concatenazione delle parti, il valore deduttivo di ognuna, ecc.) e il tutto può svolgersi compiutamente per simboli logici: laddove, sotto pena di non intenderci, conviene esser tutti d' accordo circa un senso da attribuire alle frasi come " *a* e *b* „, *a* ovvero *b* „, " *a* e non *b* „, e simili, che dinotano idee primitive di Logica; e alle radici stesse della Logica il simbolismo inconca tra barriere insormontabili, oltre le quali non vige che il solo processo empirico. (Per questo motivo, io credo, il Russel qualificava di *costanti logiche* le prime nozioni irreducibili, di cui non si apprende il valore se non con l' uso; cioè per mezzo d' esempî e col soccorso del linguaggio comune).

(*) ' *Super theorema de Cantor-Bernstein* ', loc. cit. p. 142.

Dopo la *consistenza* o *compatibilità* delle ipotesi, i Logistici distinguono ancora e dimostrano l'indipendenza relativa delle nozioni primitive (il fatto, che nessuna sia capace di definirsi esplicitamente a spese delle altre) e l'indipendenza relativa dei postulati (cioè che nessuno sia conseguenza degli altri): condizioni, che dovrebber tutte concorrere in un perfetto sistema ipotetico-deduttivo; ma che non sono però necessarie al rigore geometrico; in quanto dal trascurarle non viene infirmato il nesso logico delle varie proposizioni, nè si toglie al sistema di poter essere un tutto coerente e consequente a sè stesso.

Accade talvolta, che fra due interpretazioni quali che siano de' concetti primitivi si può dimostrar che intercede una corrispondenza perfetta, di guisa che per certi rispetti si possan confondere *in una* le varie classi di enti capaci di verificare il sistema: questo dicesi allora *categorico*, e nel caso opposto *disgiuntivo*. Ad un sistema disgiuntivo è lecito sempre congiungere nuove proposizioni primitive (indipendenti dalle altre) così da restringerne il dominio: esso lascia aperta una strada a diverse possibilità; laddove qualunque proposizione vera, che si possa enunciare negli enti primitivi d' un sistema categorico, è sempre deducibile dalle proposizioni primitive di questo.

Un piccol numero di paragoni permette di constatare o di escludere l' ' equivalenza ' di due dati sistemi: bastando perciò di sapere, se i concetti primitivi dell' uno si possano, o no, definire esplicitamente per quelli dell' altro; e se le proposizioni primitive di ciascuno sian de-

ducibili, o no, da quelle dell' altro. Distinzioni ed osservazioni ignorate dalla Logica classica, e di cui la moderna dee saper grado ai Matematici. Il nuovo concetto di *definizione possibile* ha messo in chiara luce, che i privilegi attribuiti a certe proprietà così dette ' essenziali ' hanno un valore al tutto relativo. Le differenze tra proposizioni affermative e negative, fra proposizioni generali e particolari, categoriche e ipotetiche, ecc., furon tutte assorbite da una sola e fondamental distinzione fra proposizioni, che affermano la mutua dipendenza di due o più fatti; e proposizioni ' esistenziali ', che affermano la possibilità dell' avverarsi di due o più fatti ad un tempo. Altre distinzioni trasmesse dalla logica scolastica alle moderne teorie della conoscenza furon del pari sottoposte ad una critica più rigorosa, e ne uscirono in certo modo trasfigurate, restaurate ed arricchite di nuovi e più importanti significati — p. es. quella fra giudizî categorici e giudizi ipotetici (*).

A logici matematici si debbono alcuni miglioramenti di non dubbia importanza, recati da poco tempo alla teoria della definizione. E prima di tutto lo schema tradizionale, che farebbe consister la definizione nell' assegnare il *genere* e le *differenze specifiche*, — ossia nel cercar delle classi, onde quella che si vuol definire risulti per prodotto logico — venne allargato in maniera da comprendervi il caso (molto più generale) che la classe da definire si possa avere in funzione di classi

(*) G. Vailati, ' *Il Pragmatismo e la Logica matem.* ' (loc. cit.).

note, per mezzo di operazioni quali che siano, purchè già concesse a priori, o in altro modo acquisite. Poi quegli schemi resi più elastici si dilataron per altri versi, in guisa da soddisfare al bisogno che abbiamo spesso di definire non un termine isolato, ma piuttosto una frase, dove quel termine comparisca in uno speciale atteggiamento: onde, sotto forma nuova e perspicua si conformava il fatto (intravisto già da Aristotile) che lé definizioni di parole isolate appartengono, in qualità di semplici modificazioni o casi speciali, alla grande categoria delle definizioni *implicite;* e si legittimaron quelle, che il Peano chiamò definizioni *per astrazione*, le quali tolgon motivo a creare un nuovo concetto da ciò, che una qualche relazione manifesta di possedere alcune proprietà cardinali dell' eguaglianza (come p. es. dal fatto, che due quantità di merce, atte a permutarsi con una stessa quantità di altra merce, si scambiano anche fra loro, nasce il concetto di ' valore ' ; ecc.).

E la Logica matematica non solo ha posto in chiaro, che il parlare della definibilità d' una data parola o di un dato concetto è cosa priva di senso, fin tanto che non si sappia con precisione di quali altre parole o concetti si vuol far uso nella definizione: ma inoltre ha dato una spiegazione del fatto, che parecchi termini molto importanti di scienza e filosofia si trovano appunto fra quelli, di cui non sarebbe ragionevole il chiedere o cercare una definizione in senso scolastico: ed ha perciò contribuito a sfatare il pregiudizio agnostico, che di co-

desta impossibilità logica vorrebbe incolpare la nostra incapacità di penetrare l' " essenza " delle cose (*).

***

La fusione progressiva della Logica con la Matematica — che si compieva implicitamente, e quasi inconsciamente, nei lavori di Boole, Schröder e C. Peirce da un lato, e di Weierstrass, Cantor e Peano dall'altro — costituisce senz' alcun dubbio un fatto di somma importanza per la filosofia delle matematiche. Una riforma di così gran conseguenza domandava un' esposizione sistematica, che fosse come una sintesi dei molti studi, che hanno concorso a produrla. Questa sintesi è stata tentata di fresco e con esito assai promettente, da Bertrando Russel nel 1° volume di un' opera su " *I principii delle Matematiche* " (Cambridge, 1903): la quale ricapitola, discute e coordina i risultati d' un gran numero di ricerche critiche sui fondamenti delle matematiche, e le nuove teorie che son nate da queste ricerche. È insomma un tentativo di ricostruzione logica di tutta quanta la matematica pura ne' suoi principî, con la scorta della Logica algoritmica di G. Peano (dall' A. perfezionata, rispetto al campo quasi ancor vergine dei *relativi):* e tende a giustificare la tesi dell' identità sostanziale fra Logica e Matematica pura. Il metodo del Russel consiste, a un dipresso, nel trasformare abilmente il gruppo degli assiomi o proposizioni primitive d' ogni

(*) G. Vailati, ibidem.

singola dottrina matematica in una ‘ definizione nominale ’ dei concetti primitivi di quella; per ognuno di questi cercando una conveniente interpretazione nel vasto dominio delle relazioni logiche. In grazia a codesto artificio (legittimo ed anche opportuno in un lavoro di sintesi) è dato al Russel concludere, che tutte quante le proposizioni di matematica si aggirano intorno a nove concetti irreducibili (costanti logiche) e riposan su dodici proposizioni indimostrabili; che sono appunto le idee prime e gli assiomi della Logica, o (come altri direbbe) i dati a priori, o i principî costitutivi della ragione. “ La Matematica (così l’ A. sin dall’ inizio dell’ opera) è l’insieme di tutte le proposizioni o giudizî della forma ‘ *p* implica *q* ’: dove *p* e *q* son proposizioni che contemplano, sì l’ una che l’ altra, le stesse *variabili*, e non includon *costanti*, da quelle logiche in fuori „.— Togliendo a materia, o soggetto, di codeste inferenze logiche certi ordini di fatti naturali, si avrebber le matematiche *applicate;* benchè non appartenga alla matematica in sè il riconoscere, sin dove que’ fatti si pieghino a verificare i principî e le ipotesi d’ una teoria matematica astratta.

Se non che fra quei canoni o postulati della ragion deduttiva — i quali, secondo il R., bastan da soli a nutrire tutto il pensiero matematico — non figura nessun postulato esistenziale; vale a dire nessun giudizio che affermi la *possibilità* di oggetti capaci di comportarsi nel tale o tal altro modo. Ipotesi di questa sorta occorrono in quasi tutti i sistemi matematici, che da quelle massi

mamente ripetono la loro grande efficacia e fecondità deduttiva: dove al contrario la Logica (come la intendono i più) non si cura dell'esistenza dei propri oggetti (nè ch'esistano oggetti); distinguendosi in ciò dall'Ontologia. Ora, se cotale assenza di principî esistenziali dalla Logica propriamente detta non nuoce, per es., al sistema del prof. Peano — che si appaga di realizzar la *fusione* della Logica con le altre discipline matematiche — è per altro un difetto non trascurabile di fronte agli scopi che si prefigge il R.: visto che, senza appoggiarsi a qualche giudizio esistenziale, sarà onninamente impossibile di stabilire un qualsiasi teorema d'esistenza. Dunque non par che il R. sia in grado di confermare, sul testo de' Suoi principî logici (così come stanno) l'esistenza effettiva degli enti numerici, geometrici e meccanici, che dànno corpo alle matematiche astratte: e però la sua tesi dell'identità fra matematica e logica non n'esce compiutamente provata. Il saper comporre quegli enti di sole costanti logiche non basta ad assicurarne l'esistenza; però che nessuna definizione ha poter di creare le sue materie prime.

Di qui nasce, ad es., che la dimostrazione recata a provar l'esistenza del *numero intero* (*) non è (a parer mio) concludente: anzi qui, come sempre, fallirono i mezzi tentati per confermare quell'esistenza in un dominio che escluda qualunque principio esistenziale.

Non conviene però che si esageri il peso, o s'ingran-

(*) Op. cit. p. 497.

discano le conseguenze di codesta objezione — già sollevata dal Bôcher (*) — contro il mirabile edificio speculativo del Russel. È cosa non dirò certa, ma verosimile, che tutto il male inerente a codesta lacuna nei principi del Russel non si faccia sentire più in là dello esempio testè citato. Invero i progressi conseguiti in ogni ramo delle matematiche pure da cinquant' anni in quà ne assicurano, che l' esistenza logica di qualsivoglia oggetto matematico si può desumer da quella dei numeri interi positivi: in quanto si riesce sempre a trovare nel dominio dei numeri reali o complessi una immagine o interpretazione di qualsivoglia teoria matematica, sia pur generale ed astratta; e perciò la prova d' ogni teorema esistenziale si può istituire su fatti numerici, con soli mezzi ed argomenti aritmetici. Sicchè, per riparare al difetto di cui si parla e a legittimare in ogni parte le conclusioni del R., basterebbe forse accogliere fra i principii supremi della ragione, accanto alle ordinarie premesse logiche, *un solo* giudizio esistenziale; in modo che da questo e da quelle si potesse inferir l' esitenza de' numeri interi positivi. Tale sarebbe ad es. — stando a ciò che risulta da qualche recente lavoro (**) — il giudizio: " Esiste almeno una classe infinita di enti ,, vale a dire una collezione d' individui capace di rispecchiarsi totalmente in qualche sua parte (come la classe dei numeri interi, che si può riferire, elemento per elemento, all'in-

(*) ' *The foundam. concept. etc.* ' loc. cit., p. 132.
(**) G. Peano ' *Super theor. de Cantor-Bernstein* ', loc. cit., p. 141.

sieme dei numeri pari). Sotto questa restrizione pare a me ben fondata e legittima la conclusione del R., che le matematiche non abbian d'uopo di proprii assiomi per costituirsi deduttivamente; ma che bastino a ciò le più generali premesse comuni e si può dir necessarie ad ogni umano discorso (ben s'intende, ove si congiungano a queste le definizioni logiche dei varii concetti matematici): cosicchè, in fondo, siano una sola e medesima cosa il metodo deduttivo o logico e il metodo matematico.

Il mio discorso volge al suo termine, e non ho che appena adombrato le difficoltà che si elevano e i dubbi che si muovono contro la concezione logica delle matematiche astratte; se non addirittura contro tutto il nuovo indirizzo logistico, che vorrebbe escludere dal processo dimostrativo qualunque elemento arbitrario ed autonomo, qualunque mezzo o spediente anarchico; e bandire insomma ogni foggia di deduzione e ogni strumento di analisi, che non siano debitamente censiti e qualificati.

Fu sempre in onore sino dai tempi del Kant l'objezione — oggi rinfrescata dall'autorità d'un illustre scienziato (*) — che se la Matematica fosse veramente una disciplina formale; dunque obbligata a procedere da un piccol numero d'idee fondamentali, operando con norme fisse e inviolabili, ben numerate e distinte — se insomma le sue verità fossero *analitiche* in senso Kantiano — come avrebbe potuto mai conseguire il florido sviluppo e la fecondità di cui si vanta a buon drit-

(*) H. Poincaré, '*La science et l'Hypothèse*', p. 10.

to? O non dovrebbe piuttosto consistere in perpetue ripetizioni, in affermazioni del tutto ovvie e banali, contenute implicitamente nelle premesse; e risolversi pertanto in una vasta e infeconda tautologia? Dunque si stima che la Matematica null'altro sia che un prolungamento di Logica, senza riflettere che il metodo logico non può andare che dal generale al particolare o dall' eguale all'eguale, e che la deduzione non può mai sollevarsi dal particolare al generale? D'onde verrebbero allora quelle stupende generalizzazioni, di cui si fa bello ogni ramo della matematica?

È un fatto, o Signori, che l'Aritmetica, la Geometria e le altre discipline fin quì elaborate con norme rigorosamente logistiche, contemplano le stesse cose, arrivano alle stesse conclusioni e riproducono in somma gli stessi corpi di dottrine, di cui s'ebbe già cognizione per vie più sollecite, con l'aiuto d'altri strumenti o di mezzi più grossolani. E un fatto si è, che persino la Logica formale, com'è istituita, ad es, nel Formulario mathematico di G. Peano, è proprio tutt'altra cosa che una pura e semplice tautologia; chè anzi vi trovan posto parecchie generalizzazioni del tutto simili a quelle, che incontriamo nelle matematiche (p. es. nell'Algebra) e in nessun modo spiegabili per via d'appelli all'intuizione o all'esperienza. Dunque sarà piuttosto da vedere come sia sorto il pregiudizio della innata sterilità della Logica e del metodo deduttivo o dialettico; e cercar di spiegare la maravigliosa fecondità della deduzione in matematica.

É cosa invero ben degna di meraviglia che vi siano

discipline, dove l'intrecciarsi in ogni senso e il moltiplicarsi all'infinito di conseguenze ottenute per sola virtù di raziocinio da poche proposizioni già note od ammesse per vere, costituisca un mezzo euristico spesso più efficace e più valido, che non l'esperienza e l'osservazione diretta (sia pur diligente e assistita da buoni strumenti); e dove questo è anzi l'unico mezzo che serve, non solo ad evocar cose vecchie o già note, ma ben anche a scoprir nuove leggi e nuove relazioni. E che questi rami di scienza, lungi dal mostrarsi a noi stazionarii o non progressivi, sian proprio quelli, dove il crescere delle conoscenze è più rapido e i frutti ne son più sostanziosi! — Si ha un bel dire, a proposito dei sillogismi onde risulta una scienza così fatta (poniamo la Geometria) che tutto ciò che si afferma nelle conclusioni è già implicitamente contenuto nelle premesse. Che è questo, insomma, se non riconoscere — per via d' una rozza e poco appropriata metafora — che le proposizioni tolte in ufficio di fondamentali bastano da sè sole a produrre tutte quante le conclusioni, senza ulteriore concorso dei sensi? E però quella massima non sanziona un difetto, ma piuttosto un pregio e un vantaggio del processo deduttivo sull'induttivo; nè può aversi per objezione contro l'uso del sillogismo: chè tanto varrebbe a dispregio dell'arte scultoria il dire, che una bella statua è già tutta implicitamente nel masso, d'onde l'artista, togliendo il superfluo, la estrae — giusta la poetica immagine del Buonarroti (*).

(*) G. Vailati '*Il metodo deduttivo come strumento di ricerca*' (loc. cit.) p. 30.

L'origine del pregiudizio testè segnalato è da cercare in quella concezione semplicista della Logica, che faceva riposare questa dottrina sopra i soli principii *d' identità* e *di contradizione*. Fu un tempo, che la più parte dei Logici professarono legge suprema ed unica del ragionamento essere il principio d'identità, cui riducevan per solito anche l'altro, il principio di contradizione. I più scrupolosi giungevano fino ad ammetterne un terzo, il principio *del medio escluso*; e a vedere in questi *tre* soli principii le *leggi del pensiero*, vale a dir le premesse necessarie e sufficienti a qualunque deduzione: dimentichi persino di Aristotile, che al sillogismo propriamente detto, a questo tipo classico di deduzione, assegnava per fondamento un principio a parte, il ' dictum de omni et nullo '. Per certo, una Logica sì fatta dovrebbe contentarsi di ripetere in perpetuo ' A *è* A ', ' A *non è* B ', o presso a poco. Qual meraviglia, se così nacque e s'ingrandì oltre misura la distinzione fra giudizii analitici e sintetici? Costretti gli uni (i giudizii analitici) a restar negli angusti confini di cotali insulse ripetizioni, avvinti alle sterili tautologie, che si avevano per patrimonio della Logica pura, era ben naturale, che a tutti gli altri si cercasse una base fuori della ragione; che i primi si stimassero tutt'al più idonei a spiegare il contenuto dei nostri concetti; e solo ai giudizii sintetici si attribuisse il potere di accrescer le nostre cognizioni. Ai metodi puramente logici la sola capacità di esporre verità conosciute, la sola virtù pedagogica e didattica: dove, per contro, l' acquisto di nuovi veri sarebbe sempre l'effetto

di operazioni extralogiche, svolgentisi nelle profondità misteriose ed oscure dell'intuizione!

Se non che questo modo di vedere pare oggi oltrepassato, e di buon tratto. Le indagini logistiche misero in sodo, che i pochi principii a cui alludevo poc'anzi sono radicalmente inetti a giustificare da sè soli la massima parte dei raziocinii, che tutti riconosciamo per ortodossi e legittimi. Il meccanismo della ragion deduttiva apparisce oggi assai più ricco d'ingegni e di ruote, assai più complicato e più vario, che non si credesse un tempo. Se così è, se l'albero logico sorge in realtà da più ceppi e si nutre da molte radici, ben s'intende come parecchi e varii principii associati in una stessa deduzione possano dar conseguenze non implicate da alcuno di essi in particolare; dunque *più generali* di ognuno. Non senza ragione il Leibniz designava col nome di *combinatoria* l'arte d'inventare per mezzo del raziocinio. Un matematico, avvezzo alla straordinaria fecondità e alle sorprese del calcolo combinatorio, non fa gran caso di udire ad es., che un piccol numero di postulati sia capace di generar conseguenze inesauribili.

Qualsivoglia deduzione logica ne arreca, generalmente parlando, un' economia di lavoro; e ci porge, nelle sue conclusioni, qualche nuovo fatto — che altrimenti non conosceremmo, senza l'aiuto di particolari esperienze. Dunque ci spinge avanti d' un passo sulla via del sapere, non meno d' un risultato, che emerga dai laboriosi processi dell' induzione. Si dovrà perciò dire che quella Combinatoria è un metodo sintetico? Dicasi, e non faremo

quistione di parole; purchè s' intendano sintesi puramente logiche e intellettuali, che nulla ripetano dall' intuizione sensibile; e quando pur si voglia dar loro a sostegno una qualche intuizione, sia questa un' *intuizione razionale*, vale a dire una apercezione di rapporti logici tra principi e conseguenze, e null' altro.

Benchè non si possa disconoscere alla Logica pura un certo potere di generalizzazione, questo è senza paragone maggiore nella Logica applicata; o vogliam dire in quelle discipline, dove intervengono postulati esistenziali a dar consistenza e vigore al discorso. Uno dei caratteri più spiccati del ragionamento matematico consiste nel frequente appellarsi ad elementi *ausiliarî* (basta pensare alle dimostrazioni della Geom.ª element.ᵉ e dell' Algebra, che quasi tutte si raccomandano ad operazioni e costruzioni opportune, vale a dire all' esistenza di certe figure, quantità o funzioni ausiliarie): e questa è, senza fallo, la prima sorgente di quella gran ricchezza e fecondità, che tanto ammiriamo nelle matematiche. Ma non è l' unica ragione (come pensa, ad es., il Bôcher, loc. cit., p. 131) perchè al medesimo effetto cospira (come ci accadde già di notare) la natura intrinseca delle relazioni di cui si discorre in Matematica; che tutte possiedono in sommo grado qualità associative, commutative e transitive, facilità di piegarsi ed atteggiarsi in più modi; insomma un maggior potere di combinazione (come il carbonio e l' azoto rispetto ad altri corpi): onde avviene che certi canoni e leggi — quali ad es. il principio *d' induzione completa*, la *legge di dualità* e il *teorema di Staudt*

in Geom.[a] Projettiva, i principî di *Hamilton* e di *Herz* in Meccanica—si prestino a rappresentare, abbracciare e compendiare un numero immenso di fatti.

Per certo non chiederemo alla Logica quello che non può dare; come sarebbe il chiarirci intorno al fatto psicologico dell' *invenzione*. Ma in che si distinguerà l' invenzione vera dalla falsa, se non perchè l'una si può, prima o poi, dimostrare e giustificare logicamente? L'invenzione non acquista valore di verità, finchè non è dimostrata. Ed anche sotto l'aspetto psicologico, il suggello a cui si conosce l'invenzione vera non è già l' esser questa generata da un capriccio d'immaginazione e da fantasie, come tante ne vengono ai bambini ed ai matti: ma sì da una certa logica istintiva e prudente, che per essere inconsapevole, non è meno conforme alla Logica cosciente e riflessa. Quella non fa che anticipare, con un vago presentimento—che è come il fiuto della ragione—gli atti della Logica discorsiva. Dunque nessuna opposizione fra l'euristica e la dialettica; le quali anzi vanno d'accordo, secondo una certa armonia prestabilita (*).

La scoperta diretta e immediata per intuizione geniale, la divinazione artistica, avranno sempre grande stato e potere nel regno della conoscenza: ma opporre il fatto dell'invenzione ai progressi della Logica dimostrativa sa-

(*) L. Couturat « *La Logique et la Phylos. contempor* ». Rev. de Métaphys. et de Morale, maggio 1906.

rebbe come negar fede e valore al contrappunto in ossequio all'ispirazione musicale. Nelle objezioni di questa sorta non si distingue abbastanza (io credo) fra scienza ed arte, fra l' assetto *statico* e razionale d'una disciplina scientifica e le sue qualità operative e *dinamiche*. Le tendenze logistiche (conviene riconoscerlo) mirano più all' equilibrio statico delle varie discipline deduttive e alla scienza, come corpo di verità stabilite, che alla funzione operativa della scoperta scientifica.

Nè si creda, che i progressi nell'assetto logistico delle matematiche siano per nuocere allo sviluppo delle facoltà intuitive ed artistiche. Perchè, mentre si fortifica e cresce il dominio della ragione positiva, cresce in pari tempo e si allarga la zona di confine fra questo e le altre regioni del sapere (che nuovi e maggiori acquisti compensano del terreno ceduto): e così la funzione dell'istinto intellettuale, l' attività creatrice del genio — che appunto si esercitano sul limitare della conoscenza più evoluta—lungi dall' esserne infiacchite o stremate, n'esciranno anzi accresciute in dignità e vigore. Negando all'intuizione qualsiasi valore dimostrativo, non però se ne distrugge l' officio, o si toglie ogni efficacia alle sue operazioni. Per es. che altro, se non l'intuizione, potrebbe scortare e dirigere la nostra mentre in quei casi, dove riman tuttavia dell' incerto e dell' arbitrario; come a sceglier questo piuttosto che quel sistema di postulati e definizioni, o a stabilire certi criteri estetici da soddisfare a preferenza di altri, ecc.? Nel gran regno della conoscenza vi saranno sempre paesi, dove non giun-

gono la severa disciplina e le leggi rigorose del metodo: luoghi sempre acconci e cari alla sublime anarchia del genio.

*
* *

SIGNORI,

Al primato del sentimento o della ragione pratica, al primato dell'azione o del costume, la Logica Matematica oppone il primato della *ragione speculativa*, la filosofia delle idee chiare e distinte e dell'evidenza razionale; che sottopone tutte le opinioni al dubbio metodico per " adattarle al livello della ragione ".

Gli spiriti, le forme e gli abiti logistici faranno argine al traboccare di alcune correnti ideali—come lo *psicologismo*, il *moralismo*, il *sociologismo* — che della Logica sconoscono la vera natura ed i fini. Nè sarà forse improvvido consiglio, o Signori, ristorare alquanto il prestigio e l'uffizio della ragione, di fronte alla vantata universalità di codesti sistemi; ciascuno dei quali aspira per proprio conto al dominio quasi assoluto del moderno pensiero filosofico.

E prima di condannare gli arnesi del razionalismo, come roba invecchiata ed inutile, non sarà male aspettar che sia fatta e compiuta l'indagine di tutti i principî razionali; e misurato il potere della ragione, mercè l'inventario di tutte le sue ricchezze e il bilancio di tutte le sue operazioni. All'ardua impresa si provò il genio immortale di EMMANUEL KANT, cercando di edificar la Logica trascendente sopra la logica formale della tradi-

zione scolastica: se non che questa, già debole e fiacca a' suoi tempi, pare oggi troppo insufficiente allo scopo; e però la Critica della ragione sarà tuttavia da istituire sul fondamento d'una Logica meglio adeguata allo stato attuale delle scienze (*).

Nè per ciò si dovrà esagerare o fraintendere l'uffizio della Logica formale; che non si arroga già d'esser la scienza dello spirito, nè presume occupare, o assorbire, tutta quanta la filosofia speculativa. Qualsivoglia dottrina logica presuppone delle nozioni e dei postulati, che la Logica stessa non è in grado di giustificare: alla *Critica* toccherà il farne stima. Ma noi teniamo per fermo, che la Critica non possa intendere con efficacia a quest'opera, se non quando la Logica abbia già assolto (almeno in gran parte) il proprio còmpito di scoprire, denudare e circoscrivere i dati primordiali della ragione, da cui tutto il resto procede: e che, prima di aver compiuta l'enumerazione di tutti i principii analitici, non si abbia il diritto di cercar fuori della ragione un sostegno ai principii così detti 'sintetici'. La Logica formale sarà dunque per noi la necessaria prefazione, la propedeutica d'ogni filosofia veramente scientifica e critica. Se la ragione ha dei confini, a lei sola spetterà di segnarli: nessun'altra autorità deve imporli o prestabilirli ad arbitrio. Voler filosofare fuor della ragione, o contro la ragione, è come pretender di volare più su dell'atmosfera, e di saltar fuori dell'ombra propria (**).

(*) L. Couturat, ibidem, p. 339.
(**) L. Couturat, ibid., p. 340.